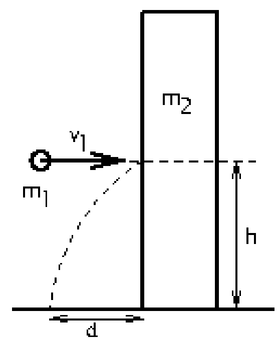
Instituto Superior Técnico
Eng. Biologia e Eng. Biomédica
1^o Exame de Física I - 26-11-2021 - Duração: 2 horas
Em opção poderá ser feito um dos Testes - Duração: 1 hora

Resolva cada um dos problemas numa folhas separadas.
Só são permitidas máquinas de calcular 'simples'.

Cotações: 1 (2;0.5;1;1.5) ; 2 (2;1;1;1) ; 3 (1.3;1.3;0.7;0.7) ; 4 (2) ; 5 (1;1;1;1)

Exame / Teste 1

1. Uma bola de massa $m_1 = 20\,g$ e velocidade $v_1 = 20\,m/s$ choca elasticamente na horizontal com um alvo de massa $m_2 = 600\,g$ que se encontra em repouso. Supondo que o alvo se pode deslocar horizontalmente e que o choque se dá no centro do alvo, a uma altura $h = 1.50\,m$ do solo, determine justificando (isto é, obtendo as equações que utilizar):



a) A velocidade da bola após o choque e a fração de energia cinética perdida por ela;

b) A velocidade do bloco após o choque;

c) A distância do ponto em que a bola chega ao solo à posição inicial do alvo;

d) O modulo da velocidade da bola no momento em que chega ao solo.

2. Dois patinadores no gelo deslocam-se, em sentidos contrários, segundo duas rectas paralelas que distam dentre si de $1.5\,m$. A velocidade, em módulo, dos patinadores é de $7\,m/s$ e a massa de cada um deles de $70\,kg$. Quando se encontram, no ponto mais próximo um do outro, dão as mãos e ficam a rodar agarrados.

a) Calcule o momento angular do conjunto imediatamente antes de os patinadores darem as mãos;

b) A sua velocidade angular dos patinadores depois de ficarem agarrados;

c) O módulo da força que cada um dos patinadores exerce para efectuar o movimento descrito;

d) A velocidade angular do conjunto se se aproximarem um do outro, encurtando a sua distância para $80\,cm$.

Exame / Teste 2

3. Considere um pêndulo gravítico plano, formado por um fio de 2 m de comprimento, de massa desprezável, e uma massa m = 3 kg, suspensa no fio, que é largado, sem velocidade inicial, de um ângulo de 5^o relativamente à posição de equilíbrio. Considere que o atrito é nulo.

a) Obtenha a equação diferencial para o movimento do pêndulo;

b) Diga qual a sua solução, para as condições iniciais atrás referidas;

c) Quantas oscilações realiza o pêndulo num hora?

d) Numa situação mais realista (em que se considere o atrito do ar), observa-se que o pêndulo reduz as suas oscilações a metade ao fim de 15 minutos. Qual é o coeficiente de amortecimento?

4. Um copo de vidro de 100g contém 200g de água e encontram-se em equilíbrio térmico a 20^oC. Que massa de vapor de água, inicialmente a 130^oC, é necessário adicionar ao copo com água para que a sua temperatura passe de 20^oC para 50^oC?

$\lambda_{H_2O}^{evap} = 2.26 \times 10^6\,\mathrm{J/kg}$ $\qquad$ $c_{\text{agua-lig}} = 4.18\,\mathrm{kJ/kg\,K}$

$c_{\text{agua-vap}} = 2.01\,\mathrm{kJ/kg\,K}$ $\qquad$ $c_{\text{vidro}} = 837\,\mathrm{J/kg\,K}$

5. Considere um cilindro munido de um pistão contendo 0.24 mol de azoto (N_2), à pressão de p = 140 kPa e à temperatura T = 310 K. Admita que o pistão está ligado a um dispositivo que permite trocar energia sob a forma de trabalho com o exterior. O pistão move-se lentamente na horizontal até o volume do gás duplicar. O gás mantém-se em contacto térmico com o exterior e a sua temperatura conserva-se constante. Considere que o azoto se comporta como um gás ideal.

a) Qual a variação de energia do gás? Justifique;

b) Qual o trabalho produzido pelo gás durante a expansão? Justifique;

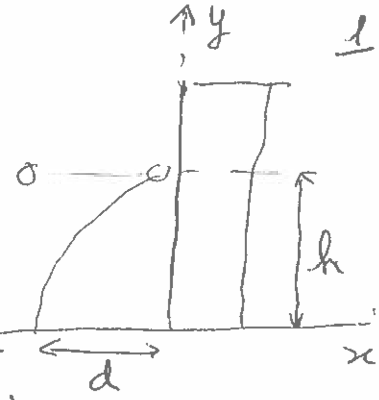
c) Qual o calor recebido pelo gás durante a expansão? Justifique;

d) Qual a variação de entropia do gás? Justifique.

1

$m_1 = 20\ g = 0{,}020\ kg$ $\qquad v_1 = 20\ m/s$

$m_2 = 600\ g = 0.6\ kg$ $\qquad h = 1{,}50\ m$



Sendo uma colisão elástica há conservação do momento linear e da energia:
Designando por 'v_i' as velocidades antes do choque e por 'u_i' as velocidades depois, tem-se:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{cases}$$

Dividindo pela massa 'm_1' e tendo em conta que $v_2 = 0$:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + \rho u_2 \\ v_1^2 = u_1^2 + \rho u_2^2 \end{cases} \qquad c/ \quad \rho = \frac{m_2}{m_1} = \frac{600}{20} = 30$$

usando os ~~resultados~~ cálculos do ~~apêndice~~ Texto de apoio "Colisão Frontal", tem-se como solução deste sistema:

$$(1) \qquad u_1 = \frac{1-\rho}{1+\rho} v_1 \quad ; \quad u_2 = \frac{2}{1+\rho} v_1$$

a) A velocidade da massa m_1 após o choque é

$$u_1 = \frac{1-30}{1+30}\, 20 \qquad \boxed{\vec{u}_1 = -18.7\,(m/s)\ \vec{e}_x}$$

A fração da energia ~~da~~ perdida:

$$\frac{\Delta E^c}{E_c^{(i)}} = \frac{E_c^f - E_c^i}{E_c^i} = \frac{\frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{u_1^2 - v_1^2}{v_1^2}$$

$$\frac{\Delta E_c}{E_c^{(i)}} = \frac{18{,}7^2 - 20^2}{20^2} \qquad \boxed{\frac{\Delta E_c}{E_c^{(i)}} = -0{,}13}$$

b) A partir de (1):

$$u_2 = \frac{2}{1+30}\, 20 \qquad \boxed{\vec{u}_2 = 1.29\ \vec{e}_x\ (m/s)}$$

c) A partir do choque m_1 fica sujeito à acção da gravidade:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{x_0} t \\ y = y_0 + v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

tendo em conta que

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_{0x} = -18.7 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 1.50 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$$

tem-se para o ponto em que chega ao

$$\begin{cases} x_f = -18.7\, t_f \\ 0 = 1.5 - \frac{1}{2} g t_f^2 \end{cases} \Rightarrow t_f^2 = \frac{2 \times 1.5}{9.8}$$

$$\boxed{t_f = 0.55\ s} \qquad \boxed{x = -10.3\ m}$$

d) A partir das expressões das velocidades:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} \\ v_y = \cancel{v_{y0}}^{\,0} - g t_f \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= -18.7\ (m/s) \\ v_y &= -5.39\ (m/s) \end{aligned}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{18.7^2 + 5.39^2}$$

$$\boxed{v = 19.5\ m/s}$$

2º método: conservação de energia mecânica:

$$E_i^c + E_i^p = E_f^c + E_f^p$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m_1} u_1^2 + \cancel{m_1} g h = \frac{1}{2} \cancel{m_1} v_{1f}^2$$

$$v_{1f}^2 = u_1^2 + 2gh$$

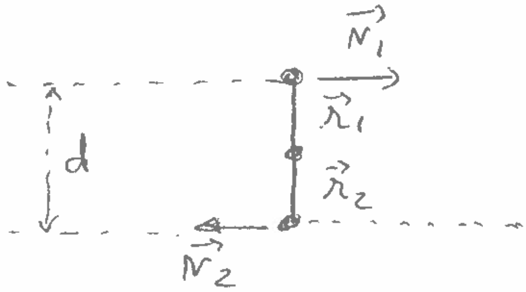
$$v_{1f}^2 = 18{,}7^2 + 2 \times 9{,}8 \times 1{,}5 = 379$$

$$\boxed{v_{1f} = 19{,}47 \ m/s}$$

(2) $d = 1{,}5\ m$

$v = 7\ m/s$

$m = 70\ kg$



a) Não havendo forças exteriores, o momento angular conserva-se (aliás, não havia momentos de forças exteriores)

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + (-\vec{r}_1) \times m_1 (-\vec{v}_1)$$

$$\vec{L} = 2\, \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1$$

$$\vec{L} = 2 \times 0{,}75 \times 70 \times 7\ \vec{e}_z \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\vec{L} = -735\ \vec{e}_z\ (kg\ m^2/s)}$$

b) Passando a coordenadas polares:

$$\vec{r}_1 = r\, \vec{e}_r \qquad \vec{v}_1 = -r\,\omega\, \vec{e}_\theta \qquad m_1 = m_2 = m$$

$$\vec{L} = -2\, m\, r^2 \omega\, \vec{e}_z$$

$$-2\, m\, r^2 \vec{\omega} = -735\ \vec{e}_z \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{735}{2 \times 70 \times 0{,}75^2}\ \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -9{,}33\ \vec{e}_z\ (rad/s)}$$

c) $F_c = \dfrac{m v^2}{r} = \dfrac{m r^2 \omega^2}{r} = m r \omega^2$

$F_c = 70 \times 0.75 \times 9.33^2$

$\boxed{F_c = 4.57 \times 10^3 \text{ N}}$

d) $\vec{L}' = -2 m r'^2 \omega' \vec{e}_z$

$\vec{L} = \vec{L}' \Rightarrow \cancel{-2 m} r^2 \omega = \cancel{-2 m} r'^2 \omega'$

$\omega' = \left(\dfrac{r}{r'}\right)^2 \omega \qquad \omega' = \left(\dfrac{0.75}{0.4}\right)^2 \times 9.33$

$\boxed{\omega' = 32.8 \text{ rad/s}}$

③ $l = 2\,m$ $\theta_0 = 5^\circ$

$m = 3\,kg$ $\dot{\theta}_0 = 0$

a) Tendo em conta que o momento das forças é igual à derivada do momento angular:

$$(1) \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i$$

as forças em jogo são

$$\vec{P} = -mg\,\vec{e}_y = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\,\text{sen}\,\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{F}_{at} = -b\,\dot{\vec{r}} = -b\,l\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{T} = T\,\vec{e}_r$$

e a resultante do momento das forças

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{P} + \vec{r}\times\vec{F}_{at} + \vec{r}\times\vec{T}$$

$$= (l\,\vec{e}_r)\times(mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\,\text{sen}\,\theta\,\vec{e}_\theta)$$

$$+ (l\,\vec{e}_r)\times(-b\,l\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) + (l\,\vec{e}_r)\times(T\,\vec{e}_r)$$

$$\vec{N} = -l\,m\,g\,\text{sen}\,\theta\,\vec{e}_z - b\,l^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$$

e o momento angular

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\dot{\vec{r}} = (l\,\vec{e}_r)\times m(l\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L} = m\,l^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$$

e substituindo em (1)

$$m\,l^2\ddot{\theta} = -l\,m\,g\,\text{sen}\,\theta - b\,l^2\dot{\theta}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0}$$

fazendo $\operatorname{sen}(\theta) \cong \theta$ (pequenas oscilações)

$$2\lambda = \frac{b}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0}$$

b) $\theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$ c/ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Se não há atrito

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{\theta}(t) = -\omega_0\theta_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = \theta_0 \cos\varphi \\ 0 = -\omega_0\theta_0 \operatorname{sen}\varphi \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 0, \pi$$

para que $\theta_0 > 0$, tem-se $\varphi = 0$ e $\theta_0 = 5$

logo

$$\theta_0(t) = 5\cos(\omega_0 t)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} = \frac{9.8}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 2.21 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{\theta(t) = 5\cos(2.21t)}$$

c)

$$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{2.21}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f = 0.35 \text{ ciclos/s}}$$

$$f_h = 3600 f_s \Rightarrow f_h = 3600 \times 0.35$$

$$\boxed{f_h = 1266 \text{ ciclos/hora}}$$

d)

$$\text{Amplitude}(t) = \theta_0 e^{-\lambda t}$$

$$t_1 = 15 \text{ min} = 15 \times 60 \Rightarrow \boxed{t_1 = 900 \text{ s}}$$

$$\cancel{\theta_0} e^{-900\lambda} = \frac{\cancel{\theta_0} e^{-\lambda \times 0}}{2} \qquad e^{-900\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$900\lambda = \ln 2 \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{900}$$

$$\boxed{\lambda = 7.7 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}}$$

4

$m_{vid} = 100\,g = 0.1\,kg$ $\quad T_1 = 20\,°C$ $\quad c_{ág-liq} = 4.18 \times 10^3\ J/kg\,K$

$m_{água} = 200\,g = 0.2\,kg$ $\quad T_2 = 130\,°C$ $\quad c_{ág-vap} = 2.01 \times 10^3\ J/kg\,K$

$m_{vap} = ?$ $\quad T_3 = 50\,°C$ $\quad c_{vid} = 837\ J/kg\,K$

$T_4 = 100\,°C$ $\quad \lambda^{v}_{água} = 2.26 \times 10^6\ J/kg$

$$Q_1 = m_{vap}\left(c_{água-vap.} \times (T_4 - T_2) - \lambda^{v}_{água} + c_{água\ liq} \times (T_3 - T_4)\right)$$

$$Q_1 = m_{vap}\left(2.01 \times 10^3 \times (-30) - 2.26 \times 10^6 + 4.18 \times 10^3 (-50)\right)$$

$$Q_1 = -2.53 \times 10^6\, m_{vap}$$

$$Q_2 = m_{água} \times c_{água\ liq.} \times (T_3 - T_1) + m_{vid} \times c_{vid} \times (T_3 - T_1)$$

$$Q_2 = 0.2 \times 4.18 \times 10^3 \times 30 + 0.1 \times 837 \times 30$$

$$Q_2 = 2.76 \times 10^4$$

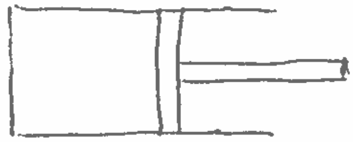
$$Q_1 + Q_2 = 0 \qquad 2.53 \times 10^6\, m_{vap} = 2.76 \times 10^4$$

$$m_{vap} = \frac{2.76 \times 10^4}{2.53 \times 10^6} \qquad m_{vap} = 0.011\,kg$$

$$\boxed{m_{vap} = 11\,g}$$

5

$T_1 = 310\ K$ $\qquad p_1 = 140\ kPa$



$V_2 = 2V_1$ $\qquad pV = nRT$ $\qquad n = 0.24\ mol$

a) Se a temperatura se mantém constante:

$$\Delta U = C_V \Delta T^{=0} \implies \boxed{\Delta U = 0}$$

b) O trabalho produzido pelo gás é:

$$dW_g = p\,dV$$

$$W_g = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\,dV = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$W_g = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_1 \ln 2$$

$$W_g = 0.24 \times 8.31 \times 310 \times \ln 2$$

$$\boxed{W_g = 429\ J}$$

c)

$$\Delta U = Q - W \qquad Q = \Delta U^{=0} + W$$

$$\boxed{Q = 429\ J}$$

d)

$$dU^{=0} = T\,dS - p\,dV \implies dS = \frac{p}{T}\,dV$$

$$dS = \frac{nR}{V}\,dV \qquad \Delta S = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = nR \ln 2 \qquad \Delta S = 0.24 \times 8.31 \times \ln 2$$

$$\boxed{\Delta S = 1.38\ J/K}$$