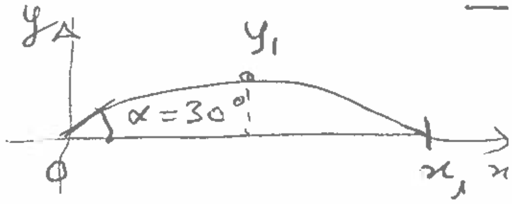


$x_1 = 500\,m$

$\alpha = 30°$

$x_0 = y_0 = 0$

$y_1 = 0$

a) $$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = y_0 + v_0 \,\text{sen}\,\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

substituindo os valores:

$$\begin{cases} x_1 = v_0 \cos\alpha\, t_1 \\ 0 = v_0 \,\text{sen}\,\alpha\, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \end{cases}$$

(1) $$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \cos\alpha}$$

$$t_1 \left(v_0 \,\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2} g t_1 \right) = 0 \qquad c/ \quad t_1 > 0$$

$$v_0 \,\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x_1}{v_0 \cos\alpha} = 0$$

(2) $$v_0^2 = \frac{g\, x_1}{2 \,\text{sen}\,\alpha \cos\alpha}$$

$$v_0^2 = \frac{9,8 \times 500}{2 \,\text{sen}\, 30 \cos 30} \Rightarrow v_0 = \sqrt{5658}$$

$$\boxed{v_0 = 75.2\ m/s}$$

$$t_1 = \frac{500}{75.2 \times \cos 30} \Rightarrow \boxed{t_1 = 7.67\,s}$$

b) Para obter a altura máxima, dada a simetria do problema $t_2 = \frac{t_1}{2}$.

[Nota: também se podia obter calculando $\frac{dy}{dt} = 0$]

$$y_2 = v_0 \operatorname{sen} \alpha \, t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$y_2 = 75.2 \times \operatorname{sen} 30 \times \frac{7.67}{2} - \frac{1}{2} 9.8 \left(\frac{7,67}{2}\right)^2$$

(3) $\boxed{y_2 = 72{,}13 \text{ m}}$

c) Para testar se há ~~um~~ outro ângulo, comecemos pela expressão da velocidade (2), ~~e~~ e do produto "sen 30 cos 30" e recorde-se que $\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

~~e com esse produto~~

$$\operatorname{sen} 30 \cos 30 = \cos(90-30) \operatorname{sen}(90-30)$$

$$= \operatorname{sen} 60 \cos 60$$

assim, o ângulo de 60° conduz aos mesmos valores que o de 30° para o alcance e para a velocidade inicial.

Assim vai calcular-se a altura máxima.

Para tal é necessário saber o novo tempo para alcançar x_1:

$$t_3 = \frac{x_1}{v_0 \cos 60} \implies t_3 = \frac{500}{75.2 \cos 60}$$

$$\boxed{t_3 = 13.29\,s}$$

fazendo o mesmo calculo para a altura máxima

$$y_4 = v_0 \operatorname{sen} \alpha \, t_4 - \frac{1}{2} g \, t_4 \qquad c/ \; t_4 = \frac{t_3}{2}$$

$$y_4 = 75.2 \times \operatorname{sen} 60 \times \frac{13.29}{2} - \frac{1}{2}\, 9.8 \times \left(\frac{13.29}{2}\right)^2$$

$$\boxed{y_4 = 216\,m}$$

Assim, $y_4 > 2 y_2$ em que $y_2 = 72{,}13$ (eq. (3))

logo o disparo é possível.

$T = 3$ horas

$R_0 = 1$ km

$\mu = 5.2\, g/cm^3$

$R_1 = 3 R_0$

$I = \frac{2}{5} M R^2$

$G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$

a)

$$E(r = R_0) = E(r = \infty)$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 - G \frac{M_0 \cancel{m}}{R_0} \Rightarrow v_0^2 = \frac{2 G M_0}{R_0} \quad (1)$$

$$M_0 = \mu V = 5.2 \times 10^3 \times \frac{4}{3} \pi \times (10^3)^3$$

$$\boxed{M_0 = 2.18 \times 10^{13} \text{ kg}}$$

$$v_0^2 = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 2.18 \times 10^{13}}{10^3} = 2.91$$

$$\boxed{v_0^{(esc)} = 1.7 \text{ m/s}}$$ (velocidade de escape)

b)

$$L_f = L_i \qquad \vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} = I \vec{\omega}\, \vec{e}_z$$

~~em coordenadas~~

$$\vec{L}_f = I_f \omega_f \vec{e}_z \qquad \vec{L}_i = I_i \omega_f \vec{e}_z$$

logo

$$I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

$$\cancel{\frac{2}{5}} M_f R_f^2 \omega_f = \cancel{\frac{2}{5}} M_0 R_0^2 \omega_0$$

e, tendo em conta que:

2

$$M_f = \mu V = \mu \frac{4}{3}\pi R_f^3 = \frac{4}{3}\pi (3R_0)^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \times 3^3$$

$$M_f = M_0 \times 27 \qquad R_f = 3R_0$$

$$27 \cancel{M_0} \times 9 \times \cancel{R_0^2}\, \omega_f = \cancel{M_0} \cancel{R_0^2}\, \omega_0$$

$$\boxed{\omega_f = \frac{1}{3^5}\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3 \times 60 \times 60} = 5.8 \times 10^{-3}\ \text{rad/s}$$

$$\omega_f = \frac{\omega_0}{3^5} = \frac{\omega_0}{243} = \frac{5.8 \times 10^{-3}}{243}$$

$$\boxed{\omega_f = 2.4 \times 10^{-6}\ \text{rad/s}}$$

c) A partir de (1), tem-se

$$v^{(esc)} = \frac{2GM}{R}$$

a velocidade de escape final é então

$$v_f^{(esc)2} = \frac{2G(3^3 M_0)}{3R_0} = 3^2 \times \frac{2GM_0}{R_0} = 3^2\, v_0^{(esc)2}$$

$$v_f^{(esc)} = 3\sqrt{\frac{2GM_0}{R}} = 3\, v_0^{(esc)}$$

$$\boxed{v_f^{(esc)} = 5.1\ \text{m/s}}$$

$m_p = 0{,}500\ g$ $\Delta x_p = 2\ cm$ $A(t=2s) = \frac{A(t=0)}{40}$

Consideremos como eixo vertical o eixo dos xx' com o sentido positivo para baixo.

a) Considerando as forças envolvidas

$$F_{mola} = -Kx$$

$$F_{peso} = mg$$

$$F_{at} = -bv = -b\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{mola} + F_{peso} + F_{at}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx + mg - b\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x - g = 0$$

designando por

$$2\lambda = \frac{b}{m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

tem-se

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x - g = 0$$

que é a equação do movimento do prato da balança.

Fazendo a transformação

$$\omega_0^2 y = \omega_0^2 x - g$$

obtém-se:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + \omega_0^2\, y = 0$$

note que a transformação corresponde a colocar o zero no ponto de equilíbrio ($x_{eq.} = \frac{g}{\omega_0^2} = 0{,}02\ m$)

Com esta transformação verifica-se que o peso do corpo apenas contribui para deslocar a posição de equilíbrio sem alterar o modo de oscilação

[redacted]

$$|\vec{F}| = K|\Delta x| \qquad \boxed{K = 245\ N/m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{245}{0{,}5}} \qquad \boxed{\omega_0 = 22{,}14\ rad/s}$$

[redacted] A solução geral da equação do movimento:

b) $$y(t) = A_0\, e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

e a amplitude:

$$A(t) = A_0\, e^{-\lambda t} \qquad A_0\, e^{-\lambda 2} = \frac{A_0\, e^{-\lambda 0}}{40}$$

$$e^{-2\lambda} = \frac{1}{40} \Rightarrow e^{2\lambda} = 40 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 40}{2}$$

$$\boxed{\lambda = 1.84\ s^{-1}}$$

e a frequência angular do movimento

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{22.14^2 - 1.84^2}$$

$$\boxed{\omega = 22.02\ rad/s}$$

Ao acrescentar a massa de arroz (1.0 kg), fica-se com:

$$m_t = m_p + m_{arroz} = 1,5 \text{ kg}$$

assim, vai alterar-se $\omega_0 \to \omega_0'$ e $\lambda \to \lambda'$

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{k}{m_t}} = \sqrt{\frac{245}{1,5}} \Rightarrow \boxed{\omega_0' = 12.78 \text{ rad/s}}$$

$$\lambda' = \frac{b}{2m_t} \qquad \lambda = \frac{b}{2m} \Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\frac{b}{2m_T}}{\frac{b}{2m}} = \frac{m}{m_t}$$

$$\lambda' = \frac{m}{m_t}\lambda \Rightarrow \lambda' = \frac{1}{3} 1,84$$

$$\boxed{\lambda' = 0,61 \text{ s}^{-1}}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0'^2 - \lambda'^2} \Rightarrow \omega' = \sqrt{12.78^2 - 0,61^2}$$

$$\boxed{\omega' = 12,76 \text{ rad/s}}$$

c) Fazendo agora a transformação $z\omega_0^2 = \omega_0'^2 x - g$ ($x_{eq.} = 0.06$ m), tem-se

$$z(t) = A_0 e^{-\lambda' t} \cos(\omega' t + \varphi)$$

e derivando:

$$\dot{z}(t) = -\lambda' A_0 e^{-\lambda' t} \cos(\omega' t + \varphi) - \omega' A_0 e^{-\lambda' t} \operatorname{sen}(\omega' t + \varphi)$$

e substituindo as condições iniciais ($z_0 = -0,04$, $\dot{z}_0 = 0$)

$$\begin{cases} -0.04 = A_0 \cos\varphi \\ 0 = -\lambda' A_0 \cos\varphi - \omega' A_0 \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\lambda'}{\omega'} = -\frac{0.61}{12.76} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -0.048$$

$177° = -2.75$

$$\varphi_1 = -2.74° \cancel{rad} \quad \text{ou} \quad \varphi_2 = \cancel{0.84\,rad}$$

a solução φ_2 é que garante $A_0 > 0$, logo

$$A_0 = \frac{-0.04}{\cos(177)} = \frac{-0.04}{-0.999} \qquad \boxed{A_0 = 0.04 \text{ m}}$$

então a solução particular será

$$z(t) = 0.04\, e^{-0.61t} \cos(12.76t - 2.75)$$

ou

$$x(t) = 0.06 + 0.04\, e^{-0.61t} \cos(12.76t - 2.75)$$

[redacted] d) A frequência de ressonância é

$$\omega^R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{22.14^2 - 2 \times 1.84^2}$$

$$\boxed{\omega^R = 21.99 \text{ rad/s}}$$

$m_1 = 100\,g$ $\quad$ $m_2 = 50\,g$ $\quad$ $c_{H_2O} = 4.17 \times 10^3\ J/kg\,K$

$T_1 = 100\,°C$ $\quad$ $T_2 = 60\,°C$ $\quad$ $\lambda_f = 3.35 \times 10^5\ J/kg$

$T_4 = 10\,°C$

a) Como o sistema está isolado

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$m_1 \cancel{c_{H_2O}} (T_3 - T_1) + m_2 \cancel{c_{H_2O}} (T_3 - T_2) = 0$$

$$m_1 T_3 - m_1 T_1 + m_2 T_3 - m_2 T_2 = 0$$

$$(m_1 + m_2) T_3 = m_1 T_1 + m_2 T_2$$

$$T_3 = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

$$T_3 = \frac{100 \times 100 + 50 \times 60}{150}$$

$$\boxed{T_3 = 86.7\,°C}$$

b) O calor perdido pela água será igual e de sinal contrário ao calor ganho pelas pedras de gelo:

$$Q_{H_2O} + Q_{cubos} = 0$$

$$Q_{H_2O} = (m_1 + m_2)\, c_{H_2O} (T_4 - T_3)$$

$$= 0.150 \times 4.17 \times 10^3 \times (10 - 86.7)$$

$$\boxed{Q_{H_2O} = -4.80 \times 10^4\ J}$$

$$Q_{cubos} = x \times c_{H_2O} (T_4 - 0) + x \lambda_f$$

$$= x \left(4.17 \times 10^3 \times 10 + 3.33 \times 10^5 \right)$$

$$Q_{cubos} = 3,75 \times 10^5 x$$

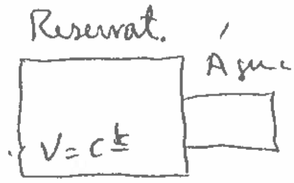
$$-4,8 \times 10^4 + 3,75 \times 10^5 x = 0$$

$$x = \frac{4,8 \times 10^4}{3,75 \times 10^5} = 0,128 \text{ kg}$$

como cada cubo tem de massa 4 g (0,004 kg)

$$N = \frac{0,128}{0,004} \qquad \boxed{N = 32 \text{ cubos}}$$

$T_1 = 273\,K \qquad T_2 = 373\,K \qquad T_3 = 323\,K$



$V_{\text{água}} = c^{te}$ $\qquad dU = dQ - \underbrace{dW}_{=0}$ porque $dV = 0$

a)

$c_V = 4.18 \times 10^3\ J/kg$

• Variação de entropia da água:

$$\Delta U_{\text{água}} = c_V\,\Delta T = c_V\,(T_2 - T_1)$$

$$= 4.18 \times 10^3 \times (373 - 273)$$

$$\Delta U_{\text{água}} = 4.18 \times 10^5\ J$$

$$dS_{\text{água}} = \frac{1}{T}\,dU \Rightarrow$$

$$(1) \qquad dS_{\text{água}} = c_V \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{\text{água}} = c_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S_{\text{água}} = 4.18 \times 10^3 \ln \frac{373}{273} \Rightarrow \boxed{\Delta S_{\text{água}} = 1.30 \times 10^3\ J/}$$

• Variação de entropia da fonte:

$$\Delta S_F = \frac{Q_F}{T_F} \qquad Q_F = -Q_{\text{água}} = -4.18 \times 10^5\ J$$

$$\Delta S_F = -\frac{4.18 \times 10^5}{373} \Rightarrow \boxed{\Delta S_F = -1.12 \times 10^3\ J/K}$$

• Variação de entropia total:

$$\overline{\Delta S} = \Delta S + \Delta S_F \qquad \overline{\Delta S} = 1.30 \times 10^3 - 1.12 \times 10^3$$

$$\boxed{\overline{\Delta S} = 180\ J/K}$$

b) • Usando a expressão (1) calculada na alínea anterior:

$$\Delta S_{água} = \Delta S_{água}^{(1)} + \Delta S_{água}^{(2)}$$

$$\Delta S_{água} = c_V \left(\ln \frac{323}{373} + \ln \frac{373}{323} \right) = c_V \ln \frac{373}{323}$$

ou seja a variação de entropia é igual à da alínea anterior:

$$\boxed{\Delta S_{água} = 1.30 \times 10^3 \ J/K}$$

• A variação de entropia das fontes será igual à soma de cada uma das etapas:

$$\Delta S_F = \Delta S_{F_1} + \Delta S_{F_2} = -\frac{\Delta U_1}{T_1} - \frac{\Delta U_2}{T_2}$$

$$\Delta U_1 = c_V \, \Delta T \Rightarrow \Delta U_1 = 4.18 \times 10^3 \times 50$$

$$\Delta U_2 = \Delta U_1 = 2.09 \times 10^5 \ J$$

$$\Delta S_F = -\Delta U_1 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) = 2.09 \times 10^5 \times \left(\frac{1}{323} + \frac{1}{373} \right)$$

$$\Delta S_F = 1.21 \times 10^3 \ J/K$$

• A variação total da entropia é

$$\overline{\Delta S} = \Delta S_{água} + \Delta S_F$$

$$\overline{\Delta S} = 1.30 \times 10^3 - 1.21 \times 10^3 \Rightarrow \boxed{\overline{\Delta S} = 90 \ J/K}$$