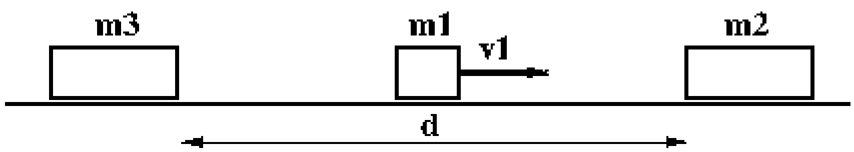
Instituto Superior Técnico
Eng. Biologia e Eng. Biomédica
1^o Teste de Física I - 29-10-2021 - Duração: 1 hora

Resolva cada um dos problemas numa folhas separada.
Só são permitidas máquinas de calcular 'simples'.

Cotações: 1 (1.5v ; 1.0v ; 1.0v ; 1.5v) ; 2 (5 x 1.0v)

1. Considere o sistema indicado na figura em que o bloco m_1 se desloca com uma velocidade $\vec{v}_1 = v_1\vec{e}_x$ com $v_1 > 0$ e tem de massa 'm'. Os blocos m_2 e m_3 têm de massa '2 m' e estão inicialmente em repouso. Admita que os choques são todos elásticos e que o atrito se pode desprezar. Determine justificando (isto é, resolvendo as equações que utilizar):



a) A velocidade dos blocos depois do primeiro choque em função de v_1;

b) A velocidade dos blocos depois do segundo choque em função de v_1;

c) Vai haver outro choque? Justifique.

d) Admitindo agora que depois da primeira colisão o bloco m_1 fica sujeito a uma força de atrito constante de módulo $|F_a| = \mu\, m$, em sentido contrário ao movimento, determine o valor mínimo de μ para que não haja a segunda colisão, sabendo que a distância entre os blocos m_2 e m_3 é d = 3 m e que a espessura do bloco 1 se pode desprezar.

2. Um satélite com a massa de 1000kg é colocado numa órbita circular, a 900 km de altitude, em volta da Terra. Calcule, justificando as suas respostas:

a) A velocidade orbital. Para tal obtenha a expressão dessa velocidade;

b) Calcule o periodo da órbita;

c) Calcule o seu momento angular;

d) Calcule a energia gravítica que é necessário fornecer ao satélite para o colocar nessa órbita;

e) Calcule a energia gravítica adicional que se deve fornecer ao satélite para o colocar numa órbita geo-estacionária?

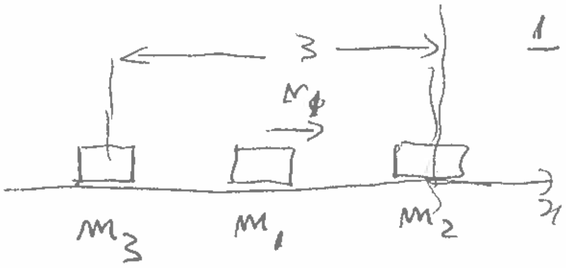
$R_T = 6.4 \times 10^6$ m $\qquad\qquad$ $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2

Física I   Teste - 1   29/10/2021

$m_1 = m$ $\Delta x_{23} = 3$

$m_2 = m_3 = 2m$



a) Na primeira colisão (m_1 e m_2) como o choque é elástico, há conservação do momento linear e da energia cinética.

Usando as expressões: ~~atrás nos textos de apoio das~~

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 \overset{0}{v_2} = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 v_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 \overset{0}{v_2^2} = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + \dfrac{m_2}{m_1} u_2 \\ v_1^2 = u_1^2 + \dfrac{m_2}{m_1} u_2^2 \end{cases} \qquad \rho = \frac{m_2}{m_1}$$

(1) $$\begin{cases} v_1 = u_1 + \rho u_2 \\ v_1^2 = u_1^2 + \rho u_2^2 \end{cases}$$

~~___~~ a resolução destas equações pode ser vista no texto de apoio "Colisão frontal". Daqui resulta:

$$u_1 = \frac{1-\rho}{1+\rho} v_1 \qquad u_2 = \frac{2}{1+\rho} v_1 \qquad c/\ \rho = 2$$

ou seja:

$$u_1 = \frac{1-2}{3} v_1 \qquad u_2 = \frac{2}{3} v_1$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{1}{3} v_1} \qquad \boxed{u_2 = \frac{2}{3} v_1} \qquad \boxed{u_3 = 0}$$

b) Para a segunda colisão, usando as expressões obtidas em (1):

$$w_1 = \frac{1-2}{1+2}\, u_1 \qquad w_3 = \frac{2}{1+2}\, u_1$$

$$w_1 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{v_1}{9}\right) \qquad w_3 = +\frac{2}{3}\left(-\frac{v_1}{3}\right)$$

$$\boxed{w_1 = \frac{v_1}{9} \qquad w_3 = -\frac{2v_1}{9} \qquad w_2 = u_2 = \frac{2v_1}{3}}$$

c) Não vai haver colisões. ① e ② têm o mesmo sentido mas $w_2 > w_1$; ① e ② têm sentidos opostos a ③

d) O trabalho é igual à variação da energia cinética:

$$W = \Delta E^c \qquad \vec{F} = +\mu\, m_1\, \vec{e}_x$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \mu m_1 (-dx) = -\mu m_1 dx$$

$$W = \int_{2}^{3} dW = +\mu m_1 (-3-0) = -3\mu m_1$$

$$\Delta E^c = E^c_f - E^c_i = 0 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = -\frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

$$-3\mu \cancel{m_1} = -\frac{1}{2}\cancel{m_1} u_1^2 \qquad \mu = \frac{1}{6} u_1^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{v_1}{3}\right)^2$$

$$\boxed{\mu = \frac{v_1^2}{54}}$$

$m = 1000\,kg$

$h = 900\,km = 9 \times 10^5\,m$

$M_T = 5.98 \times 10^{24}\,kg$

$R_T = 6.4 \times 10^6\,m$

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,N m^2/kg^2$

$$d = R_T + h = 6.4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 = 7.3 \times 10^6\,m$$

a) Para a órbita circular a resultante das força em 'r' é zero

$$F_g + F_c = 0 \Rightarrow -G\frac{M_T \cancel{m}}{d^{\cancel{2}}} + \frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{d}} = 0$$

$$v^2 = \frac{G M_T}{d} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{7.3 \times 10^6} = 54{,}64 \times 10^6$$

$$\boxed{v = 7.39 \times 10^3\,m/s}$$

b)

$$v = \omega d = \frac{2\pi}{T} d \Rightarrow T = \frac{2\pi d}{v}$$

$$T = \frac{2\pi \times 7.3 \times 10^6}{7{,}39 \times 10^3} \qquad \boxed{T = 6{,}2 \times 10^3\,s}$$

$$\boxed{T = 1\,h\ 43\,min\ 27\,s}$$

c) O momento angular (coordenadas cilíndricas)

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\vec{L} = (d\,\vec{e}_r \times m\,v\,\vec{e}_\theta) = m\,d\,v\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L} = 10^3 \times 7.3 \times 10^6 \times 7{,}39 \times 10^3$$

$$\boxed{\vec{L} = 5{,}39 \times 10^{13}\,\vec{e}_z \ (kg\,m^2/s)}$$

d) $$\Delta E^p = E_f^p - E_i^p = -G\frac{M_T m}{d} + G\frac{M_T m}{R_T}$$

(1) $$= G M_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{d}\right) = \frac{G M_T m h}{R_T d}$$

$$\Delta E^p = \frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times10^{3}\times9\times10^{5}}{6.4\times10^{6}\times7,3\times10^{6}}$$

$$\boxed{\Delta E^p = 7.68\times10^{9}\ J}$$

e) Da expressão de órbita circular vista na alínea 'a)':

$$v^2 = \frac{GM_T}{d} \quad \text{ou} \quad \omega^2 d^2 = G\frac{M_T}{d}$$

A condição de órbita geoestacionária é:

$$\omega' = 2\pi\ \text{rad/dia} = \frac{2\pi}{24\times60\times60} = 7,27\times10^{-5}\ \text{rad/s}$$

$$\omega'^2 d'^2 = G\frac{M_T}{d'} \Rightarrow d'^3 = \frac{GM_T}{\omega'^2}$$

$$d'^3 = \frac{6\times6.7\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{(7,27\times10^{-5})^2} = 7.55\times10^{22}$$

$$\boxed{d' = 4.23\times10^{7}\ m} \qquad h' = d' - R_T = 3,59\times10^{7}\ m$$

$$\Delta E_p' = E_p'^f - E_p'^i = G M_T m\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d'}\right) \qquad (\text{ver (1)})$$

$$\Delta E_p' = 6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times10^{3}\left(\frac{1}{7.3\times10^{6}} - \frac{1}{4.23\times10^{7}}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_p' = 4.52\times10^{10}\ J}$$