Instituto Superior Técnico
Eng. Biologia e Eng. Biomédica
2^o Teste de Física I - 12-11-2021 - Duração: 1 hora

Resolva cada um dos problemas numa folhas separadas.
Só são permitidas máquinas de calcular 'simples'.

Cotações: 1 (1.3v;0.7v;1.3v;0.7v) ; 2 (2 x 1.0v) ; 3 (2 x 2v)

1. Considere um pêndulo de 1.0 m de comprimento com uma massa de 2.0 kg na ponta, que oscila com pequenas oscilações. Sabe-se que as suas oscilações se reduzem a um terço ao fim de 5.0 min. Admita que a força de atrito é proporcional à velocidade.

a) Obtenha a equação diferencial do movimento do pêndulo e diga qual é a sua solução geral para pequenas oscilações;

b) Determine o coeficiente de amortecimento e a frequência de oscilação do pêndulo;

c) Se o pêndulo fôr largado de um ângulo de 5^o, sem velocidade inicial, obtenha a sua solução particular;

d) Se actuarmos o pêndulo com uma força exterior periódica, qual deverá ser a frequência dessa força para que o pêndulo entre em ressonância?

2. Um calorímetro de alumínio de 200 g contém 600g de água a 20^oC. Em seguida, 100g de gelo a -20^oC são colocadas no calorímetro.

a) Qual temperatura final do sistema, admitindo que não há perdas de calor para o exterior. (Ajuda: tenha em conta que com estes dados a temperatura final é maior do que '0 ^{o}C').

b) Um segundo pedaço de gelo de 200 g a -20^oC é adicionado. Qual a quantidade de gelo que permanece no sistema após ser atingido equilíbrio? (Ajuda: Verifica-se que quando se atinge o equilíbrio só parte do gelo derreteu.)

Calor específico de gelo: $c_{gelo} = 2.0\,\mathrm{kJ/kg\,K}$
Calor específico do alumínio: $900\,\mathrm{J/kg\,K}$
Calor latente de fusão gelo: $\lambda^f_{gelo} = 333\,\mathrm{kJ/kg\,K}$

3. Um mole de uma gás ideal monoatómico clássico, de capacidade calorífica $\mathrm{C}_V = 3\,\mathrm{R}/2$, ocupa um volume $\mathrm{V}_o = 22.4\,\ell$ à temperatura de $\mathrm{T}_o = 273\,\mathrm{K}$.

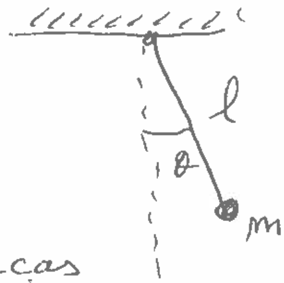
Constante Universal dos gases ideais: $\mathrm{R} = 8.31\,\mathrm{J/mol\,K}$

a) Considerando que o sistema está isolado (isto é, sem trocas de calor com o exterior), determine a variação de entropia do gás numa expansão livre de V para 2 V.

b) Considere que o gás é seguidamente comprimido reversivelmente de 2 V para V em contacto com uma fonte cuja temperatura é T_o. Determine a variação de entropia do gás e a variação de entropia da fonte.

$l = 1.0$ $\qquad$ $\theta(5\,\text{min}) = \dfrac{\theta_0}{3}$

$m = 2.0$ kg $\qquad$ $t_1 = 5\,\text{min} = 5 \times 60 = 300\,s$



a) Tendo em conta que o momento das forças é igual à derivada do momento angular

(1) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i$$

as forças em jogo são:

$$\vec{P} = -mg\,\vec{e}_y = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{F}_{at} = -b\,\dot{\vec{r}} = -b\,l\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$T = T\,\vec{e}_r$$

tem-se para o momento das forças

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{P} + \vec{r}\times\vec{F}_{at} + \vec{r}\times\vec{T}$$

$$= (l\vec{e}_r)\times(mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta) + (l\vec{e}_r)\times(-b\,l\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) + (l\vec{e}_r)\times(T\vec{e}_r)$$

$$\vec{N} = -l\,mg\sin\theta\,\vec{e}_z - b\,l^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\dot{\vec{r}} = (l\vec{e}_r)\times m(l\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L} = ml^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$$

e ~~...~~ substituindo em (1)

$$ml^2\ddot{\theta} = -l\,mg\sin\theta - b\,l^2\dot{\theta}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

fazendo $\sin(\theta) \simeq \theta$ (pequenas oscilações):

$$2\lambda = \frac{b}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad \sin\theta \simeq \theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0} \qquad \omega_0 = 3.13 \text{ rad/s}$$

que tem como solução geral

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)} \qquad \text{e} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

b) Usando a expressão da amplitude "$\theta_0 e^{-\lambda t}$"

$$\cancel{\theta_0} e^{-\lambda 300} = \frac{\cancel{\theta_0}}{3} e^{-\lambda \times 0} \Rightarrow e^{-\lambda 300} = \frac{1}{3}$$

$$+\lambda 300 = \ln 3 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 3}{300}$$

$$\boxed{\lambda = 3.7 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Rightarrow \boxed{\omega = 3.13 \text{ rad/s}}$$

c)

$$\theta_0 = 5^\circ \qquad \dot{\theta}_0 = 0$$

$$\begin{cases} \theta = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{\theta} = -\lambda A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega A e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = A \cos\varphi \\ 0 = -\lambda \cancel{A} \cos\varphi - \omega \cancel{A} \sin\varphi \end{cases}$$

fazendo $\operatorname{sen}(\theta) \simeq \theta$ (pequenas oscilações):

$$2\lambda = \frac{b}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad \operatorname{sen}\theta \simeq \theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0}$$

que tem como solução geral

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)} \qquad \text{c/ } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

b) Usando a expressão da amplitude "$\theta_0 e^{-\lambda t}$"

$$\cancel{\theta_0} e^{-\lambda 300} = \frac{\cancel{\theta_0}}{3} e^{-\lambda \times 0} \Rightarrow e^{-\lambda 300} = \frac{1}{3}$$

$$+\lambda 300 = \ln 3 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 3}{300}$$

$$\boxed{\lambda = 3.7 \times 10^{-3}\ s^{-1}}$$

c)

$$\theta_0 = 5^\circ \qquad \dot\theta_0 = 0$$

$$\begin{cases} \theta = A e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) \\ \dot\theta = -\lambda A e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) - \omega A e^{-\lambda t}\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = A\cos\varphi \\ 0 = -\lambda \cancel{A}\cos\varphi - \omega\cancel{A}\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

da segunda equação:

$$\operatorname{tg}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0, \pi$$

e, da primeira, tem-se que:

$$A = \frac{\theta_0}{\cos\varphi}$$

sendo $\theta_0 > 0$, a solução de φ que satisfaz é $\varphi = 0$

$$\begin{cases} A = \theta_0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

para $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right) - \lambda^2} = \sqrt{\frac{9,8}{1,0} - (3,7 \times 10^{-3})^2}$$

$$\boxed{\omega \approx 3,13 \text{ rad/s}} \qquad (\omega_0 = \omega)$$

$$\boxed{\theta(t) = 5\, e^{-3,7\times 10^{-3} t} \cos(3,13\, t)}$$

d)

$$\omega^R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{3,13^2 - 2 \times (3,7 \times 10^{-3})^2}$$

$$\boxed{\omega^R = 3,13 \text{ rad/s}}$$

$M_{Al} = 200\,g = 0,2\,kg$

$M_{H_2O} = 600\,g = 0.6\,kg$

$M_{gelo_1} = 100\,g = 0.1\,kg$

$M_{gelo_2} = 300\,g = 0,3\,kg$

$c_{Al} = 900\ J/kg\,K$

$T_c = 20°C$

$T_g = -20°C$

$c_{gelo} = 2 \times 10^3\ J/kg\,K$

$\lambda^f_{gelo} = 3,33 \times 10^5\ J/kg$

$c_{H_2O} = 4.185 \times 10^3\ J/kg\,K$

a) Estando o sistema isolado

$$Q_Q + Q_F = 0$$

Q_Q - Calorímetro mais água

Q_F - Gelo

$$Q_Q = 0,2 \times 900 \times (T_f - 20) + 0,6 \times 4.184 \times 10^3 (T_f - 20)$$

$$= 180\,T_f - 3600 + 2510,4\,T_f - 50\,208$$

$$Q_Q = 2690.4\,T_f - 53808$$

$$Q_F = 0.1 \times 2 \times 10^3 \times (0 - (-20)) + 3,33 \times 10^5 \times 0.1 +$$
$$0.1 \times 4,184 \times 10^3 (T_f - 0)$$

$$Q_F = 4000 + 33300 + 418.4\,T_f$$

$$Q_F = 418.4\,T_f + 37300$$

$$Q_Q + Q_F = 0 \Rightarrow 2690.4\,T_f - 53\,808 + \cancel{5338}\ 418,4\,T_f + 37300 = 0$$

$$3108.8\,T_f = 16508 \Rightarrow T_f = \frac{16508}{3108.8}$$

$$\boxed{T_f = 5.3\,°C}$$

b) Vai calcular-se a quantidade de gelo que derrete primeiro e depois faz-se a diferença:

$$Q'_Q = 0,2 \times 900 \times (0-20) + 0,6 \times 4.184 \times 10^3 (0-20)$$

$$= -3600 - 50\,208$$

$$Q'_Q = -53808 \text{ J}$$

$$Q'_F = 0,3 \times 2 \times 10^3 \times (0-(-20)) + m \times 3.33 \times 10^5$$

$$Q'_F = 1200 + 3,33 \times 10^5 m$$

$$m = \frac{41808}{3.33 \times 10^5} \qquad m = 0,125 \text{ kg}$$

A quantidade de gelo que não derreteu, foi:

$$m'_g = 0.300 - 0.125$$

$$\boxed{m'_g = 0.175 \text{ kg}} = 175 \text{ g}$$

Expansão livre: $\Delta U = 0$ $\qquad n = 1$ $\qquad pV = nRT$

$V_0 = 22.4\,l$ $\qquad T_0 = 273\,K$ $\qquad C_V = \frac{3R}{2}$

a)

$$\Delta U = C_V \Delta T \qquad \Delta T = 0 \iff T = c^{te}$$

$$\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{dU} = T\,dS - p\,dV \implies T\,dS = p\,dV$$

$$p = \frac{nRT}{V} \implies \cancel{T}\,dS = \frac{nR\cancel{T}}{V}\,dV$$

$$dS_{12} = nR\frac{dV}{V}$$

$$\Delta S_{12} = nR\int_{V_0}^{2V_0}\frac{dV}{V} = \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{n}R\left[\ln V\right]_{V_0}^{2V_0}$$

$$\Delta S_{12} = R\ln\frac{2V_0}{V_0} \implies \Delta S_{12} = R\ln 2$$

$$\boxed{\Delta S_{12} = 5.76\ J/K}$$

b) Se o processo é ~~irr~~ reversível a entropia total conserva-

$$\overline{\Delta S}_{21} = 0 \implies \overline{\Delta S}_{21} = \Delta S_{21g} + \Delta S_{21F}$$

$$\Delta S_{21F} = -\Delta S_{21g}$$

se o gás volta ao estado inicial $\Delta S_{21g} = -\Delta S_{12}$

$$\boxed{\Delta S_{21F} = \Delta S_{12} = 5.76\ J/K}$$